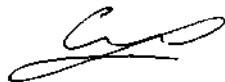


На правах рукописи



Ставцев Станислав Леонидович

**Исследование трёхмерных граничных
задач о дебите системы несовершенных скважин
в кусочно-неоднородных слоях**

05.13.01 - системный анализ,
управление и обработка информации

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2003

Работа выполнена в Институте вычислительной математики РАН

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор
И.К. Лифанов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Е. В. Захаров,

кандидат физико-математических наук,
А.А. Аксютин

Ведущая организация:

Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского» **ЦАГИ.**

Защита состоится «**26**» сентября 2003 года в **15-00** часов на заседании диссертационного совета Д 002.045.01 в Институте вычислительной математики РАН по адресу:
119991, г. Москва, ГСП-1, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института вычислительной математики РАН.

Автореферат разослан «**21**» августа 2003 года.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук



Г.А. Бочаров

Актуальность темы.

Решение задач о движении жидкости в пористых средах имеет важное значение. К решению трёхмерных задач фильтрации приводят исследования эксплуатации нефтеносных и водоносных слоев грунта, расчёты строительства гидротехнических сооружений, исследования в области охраны и мониторинга окружающей среды. В частности для практики интерес представляет расчёт фильтрационных течений к системе скважин, расположенных в областях со сложной геологической структурой, а также расчёт дебитов такой системы скважин. Для решения задач фильтрации необходимо построить математическую модель и провести исследование решаемых задач.

Задачами фильтрации занимались целый ряд исследователей: В.Д. Бабушкин, **М. Маскет**, П.Я. Полубаринова-Кочина, Г.Г. Тумашев, М.А. Гусейн-Заде, И.А. Чарный и др. В их работах исследовались как двумерные, так и трёхмерные фильтрационные задачи, описываемые линейными или нелинейными законами фильтрации. При этом течение рассматривалось в кусочно-однородных или неоднородных слоях.

Интерес представляет изучение фильтрационных течений в слоях со сложной геологической структурой, когда среда является кусочно-неоднородной, то есть когда свойства среды меняются скачкообразно на некоторой гладкой поверхности. При этом область фильтрации может быть ограничена поверхностью питания или непроницаемыми поверхностями, в том числе сингулярными поверхностями. Решение подобных трёхмерных задач значительно сложнее, чем решение аналогичных двумерных.

Использование теории потенциала для линейных задач фильтрации позволяет перейти от трёхмерных дифференциальных уравнений к сингулярным и гиперсингулярным интегральным уравнениям, записанных на двумерных поверхностях, что сокращает объём вычислений и позволяет провести многовариантный анализ расположения скважин.

В случае напорной фильтрации, когда течение жидкости в грунте обусловлено разностью давлений, задаваемых на поверхности питания и в скважинах, практическую ценность имеет расчёт дебита скважины. На искомую величину оказывает влияние не только область фильтрации (свойства среды, поверхности, ограничивающие, область фильтрации), но и модели фильтров скважин.

Разного рода модели фильтров скважин описаны в работах В.М. Гаврилко, Н.Н. Виригина, В.А. Мироненко, **М. Маскета**, В.В. Черных, И.Г. Ярмахова. В случае задач двумерной фильтрации используется самая простая модели скважины - модель точечного стока. Для решения задач трёхмерной фильтрации используется модель в виде линейного стока. Однако использова-

ние грубых моделей значительно искажают рассчитываемые течения и соответственно рассчитываемый параметр скважин. Поэтому целесообразно построить **новую**, более точную модель фильтра скважины и провести сравнительный анализ различных моделей. Тем самым можно указать границы применимости построенных ранее моделей и отметить круг задач, в которых требуется применение уточнённой модели.

Цель работы. Целью работы является создание и исследование новых трёхмерных математических моделей работы системы скважин в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях в случае, когда границы области фильтрации моделируются поверхностями класса Ляпунова. На основе этих моделей изучить влияние на дебит системы скважин неоднородности среды, границ области фильтрации, их взаимного расположения и интерференцию скважин. Построить новую математическую модель фильтров скважины, провести сравнительный анализ новой и известных моделей и обосновать использования этих моделей для конкретных задач практики.

Научная новизна и теоретическое значение работы состоят в следующем:

1) построены и исследованы новые трёхмерные математические модели работы системы скважин в кусочно-однородных и *кусочно-неоднородных* слоях, ограниченных поверхностью питания и непроницаемой поверхностью. Все граничные поверхности моделируются кусочно-гладкими **поверхностями**, коэффициенты проницаемости сред в области фильтрации описываются *произвольными* гладкими функциями.

2) для кусочно-неоднородных слоев в случае *канонических границ* области фильтрации (сферы (полусферы) и плоскости (**полуплоскости**)) *получены решения в конечном виде*. Эти решения представляют интерес как модели течений к системе несовершенных скважин. Также эти решения используются для *практической оценки* скорости сходимости метода дискретных особенностей (в том числе и метода замкнутых дискретных вихревых рамок) для решения задач трёхмерной фильтрации с поверхностями класса Ляпунова.

3) в случае произвольных гладких границ исследование поставленных задач сводится с помощью потенциала двойного слоя к системе интегральных уравнений второго рода типа **Фредгольма** и *гиперсингулярных* интегральных уравнений.

4) для решения полученных *гиперсингулярных интегральных уравнений обобщён метод* замкнутых дискретных вихревых рамок, применяемый, на случай неоднородной среды, когда коэффициент проницаемости её является функцией одной переменной.

5) численное решение фильтрационных задач позволяет использовать многозвенную аппроксимацию коэффициента проницаемости среды. Это позволяет построить *эффективную методику* расчёта дебитов скважин в средах с произвольными **проницаемостями $K(z)$** с помощью решения задачи с помощью системы интегральных уравнений.

6) построена *новая модель скважины с перфорированным фильтром*. Проведён сравнительный анализ разных моделей скважины, что позволило указать условия применимости известной модели "линейный сток" к решению задач. Отображены результаты сравнения разных моделей скважины, приведено уточнение старой модели. Дано обоснование использования указанной модели в конкретных задачах практики. Построение новой модели привело к решению задач с принципиально новыми граничными условиями. Исследование этих задач сведено к решению *гиперсингулярных интегральных уравнений с 5- функциями Дирака в правой части*.

7) исследовано влияние на **дебиты** скважин границ области фильтрации, неоднородности слоя, их взаимное расположение и интерференция. Приведён сравнительный анализ дебитов горизонтальных, наклонных и вертикальных скважин. Указаны условия, при которых дебит системы скважин максимален.

Практическая значимость. Построенные модели применены к актуальным задачам практики в случае кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоев грунта. Решены конкретные задачи практики, возникающие при разработке нефтеносных (водоносных) слоев грунта сложной геологической структуры.

В работе показано, что для целого ряда исследований можно **воспользоваться** упрощённой моделью "линейный сток". При решении задач о нахождении дебитов системы скважин как в кусочно-однородных, так и кусочно-неоднородных слоях большую роль играют размеры и взаимное расположение областей фильтрации, а также расположение в них скважин, чем их форма. Указаны практические рекомендации по размещению скважин в области фильтрации относительно её границ, их взаимного расположения в случае, когда взаимное влияние скважин друг на друга велико.

Приведены примеры расчёта расположения скважин, при котором дебит скважин, расположенных в грунте сложной геологической структуры, максимален.

На основе проведённого численного эксперимента показана целесообразность использования горизонтальных и наклонных скважин по сравнению с вертикальными скважинами.

Построенная новая модель скважин, позволяют более точно рассчитать дебиты как **вертикальных**, так и горизонтальных скважин при их близком расположении друг от друга.

Апробация работы. Работа в целом докладывалась и обсуждалась на заседаниях научных семинаров: "Проблемы гидродинамики" Орловского государственного университета (рук. профессор В.Ф. Пивень), "Интегральные уравнения" факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (рук. профессор Е.В. Захаров и профессор И.К. Лифанов), "Вычислительная математика и математическая физика" (рук. академик Н.С. Бахвалов и профессор В.И. Лебедев).

По мере получения основные результаты диссертационной работы докладывались:

1) на заседаниях научного семинара «Проблемы гидродинамики» кафедры теоретической физики Орловского государственного университета (рук. профессор В.Ф. Пивень 1998 – 2003 гг.);

2) на X Международном симпозиуме "МДОЗМФ - 2001", посвященном памяти профессора С.М. Белоцерковского;

3) на школе молодых учёных "МДОЗМФ - 2002";

4) на XI Международном симпозиуме "МДОЗМФ-2003".

Публикации. Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 5 статьях.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и иллюстраций. Общий объем работы составляет 173 страницы. Библиография содержит 121 наименование.

Содержание работы

Во **введении** даётся краткий обзор проблем, возникающих в задачах фильтрации, обосновывается актуальность темы и даётся обзор содержания диссертации.

Глава 1 посвящена постановке задачи о работе системы из n несовершенных скважин, расположенных в кусочно-неоднородном слое. В работе рассмотрена линейная стационарная напорная фильтрация, которая имеет место в случае, когда скважины работают с независимым от времени дебитом.

Будем рассматривать течение жидкости в кусочно-неоднородной среде к системе n несовершенных скважин, то есть будем считать, что в области D_1 проницаемость среды характеризуется коэффициентом $K_1(M)$, а в области D_2 - $K_2(M)$. Границу раздела областей $D_\nu, \nu=1,2$ обозначим через a . Область фильтрации $D=D_1 \cup D_2$ ограничена поверхностью питания σ_D и поверхностями сква-

Если коэффициент проницаемости среды в некоторых точках обращается в ноль, то существует сингулярная поверхность σ_{01} , на которой необходимо потребовать выполнения условия

$$K_v(M) \frac{\partial \varphi_v(M)}{\partial n_M} = 0, M \in \sigma_{01}. \quad (5)$$

Во втором параграфе рассмотрены различные модели скважин, которые будут использоваться в дальнейших **исследованиях**, а именно, модель линейного стока, а также модель скважины в виде перфорированного цилиндра (см. рис. 2). В зависимости от выбранной модели скважины задаются различные условия на каждой скважине.

В случае, когда скважина моделируется линейным стоком условие задаётся на поверхности **скважины**:

$$\begin{aligned} \varphi_1(M_\alpha) &= C_1, M_\alpha \in \sigma_\alpha, i = 1, 2, \dots, n_1; \\ \varphi_2(M_\alpha) &= C_1, M_\alpha \in \sigma_\alpha, i = n_1 + 1, \dots, n; \end{aligned} \quad (6)$$

где M_{ci} - точка на поверхности i скважины.

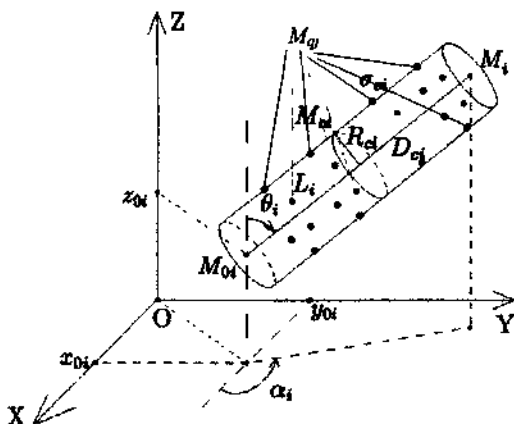


Рис. 2. Фильтр скважины

Так как скважина представляет собой цилиндр с отверстиями, то скважину можно моделировать в виде непроницаемого цилиндра с системой точечных стоков. Рассмотрим систему из m стоков, расположенных на i -й скважине (число стоков на каждой скважине будем считать одинаковыми). Общее

число стоков, расположенных на скважинах в области D_v , обозначим через $m_v = m \cdot n_v$. Мощность стоков для одной и той же i -ой скважины будем считать одинаковой $\bar{q}_j, j = m(i-1) + 1, \dots, m \cdot i$.

Согласно работам И.К. **Лифанова** на непроницаемых поверхностях σ_{ci} задаются граничные условия

$$\begin{aligned}
\left(K_1(M) \frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M} \right)^+ &= 0, M \neq M_{qj}, j=1,2,\dots,m_1, M \in \sigma_{\alpha}, i=1,2,\dots,n_1; \\
\left(K_1(M) \frac{\partial \varphi_1(M)}{\partial n_M} \right)^- &= 0, M \in \sigma_{\alpha}, i=1,2,\dots,n_1; \\
\left(K_2(M) \frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M} \right)^+ &= 0, M \neq M_{qj}, j=m_1+1,\dots,m_1+m_2, M \in \sigma_{\alpha}, i=n_1+1,\dots,n; \\
\left(K_2(M) \frac{\partial \varphi_2(M)}{\partial n_M} \right)^- &= 0, M \in \sigma_{\alpha}, i=n_1+1,\dots,n;
\end{aligned} \tag{7}$$

Физический смысл граничных условий (7) состоит в том, что во всех точках поверхности кроме $M=M_{qj}$, в котором расположены стоки, нормальная составляющая скорости равна нулю, то есть выполняется условие непротекания. Это же условие выполняется для всех точек $M \rightarrow M_{qj}$ из области D_{α} (область, ограниченная поверхностью скважины σ_{α}), то есть течение в области D_{α} является гладким, а в области D_{ν} течение имеет особенности, расположенные в точках M_{qj} . Таким образом, в силу граничных условий (7₂) и (7₄) при замкнутой поверхности σ_{α} скорости течения в области D_{α} будут равны нулю.

Для нахождения дебитов скважин в случае модели перфорированного цилиндра необходимо задать дополнительные условия для каждой скважины:

$$\begin{aligned}
\varphi_i(M_{\alpha i}) &= C_i, M_{\alpha i} \in D_{\alpha}, i=1,2,\dots,n_1; \\
\varphi_i(M_{\alpha i}) &= C_i, M_{\alpha i} \in D_{\alpha}, i=n_1+1,\dots,n;
\end{aligned} \tag{8}$$

где $M_{\alpha i}$ - произвольная точка D_{α} в силу постоянства квазипотенциала $\varphi_i(M)$ в области D_{α} .

Таким образом, задача сводится к нахождению квазипотенциалов фильтрационного течения $\varphi_i(M)$, от которых зависят искомые **дебиты** скважин.

Квазипотенциалы возмущения $\varphi_i(M)$ будем искать в виде

$$\text{fl}_i(M) = \varphi_{0\nu}(M) + \Phi_{\nu}(M), M \in D_{\nu}, \nu = 1,2, \tag{9}$$

где $\varphi_{0\nu}(M)$ - невозмущённый квазипотенциал, описывающий течение жидкости к скважинам в отсутствие поверхностей a , σ_{Π} , $\sigma_{\theta 2}$, а также поверхностей σ_{α} (если используется модель скважины в виде перфорированного цилиндра).

Вид $\varphi_{0\nu}(M)$ определяется используемой моделью скважины. Для модели "линейный сток" эти функции можно записать как

$$\varphi_{0\nu}(M) = \sum_{i=1}^2 q_i \int_{L_i} F_{\nu}(M, N) dL_N, N \in D_{\nu}, \nu = 1,2. \tag{10}$$

Здесь q_i - дебиты скважин, L_i - отрезок точечных стоков, расположенных по оси скважины; $F_{\nu}(M, N)$ - фундаментальное решение уравнения (1), а также

введены обозначения $r_1 = \begin{cases} 1, \nu = 1; \\ n_1 + 1, \nu = 2; \end{cases} r_2 = \begin{cases} n_1, \nu = 1; \\ n, \nu = 2. \end{cases}$

Для модели скважины в виде перфорированного цилиндра квазипотенциалы $\varphi_{0\nu}(M)$ имеют вид

$$\varphi_{0\nu}(M) = \sum_{i=1}^s q_{i\nu} \sum_{j=1}^n F_{\nu}(M, M_{ij}), j = m(s-1) + i, M \in D_{\nu}, \nu = 1, 2. \quad (11)$$

В случае использования модели линейного стока для нахождения $\Phi_{\nu}(M)$ (потенциала возмущения) из (9) можно использовать различные подходы. Для канонических поверхностей a , σ_{Π} , σ_{02} в виде сферы (полусферы), плоскости (полуплоскости) использование соответствующих теорем о сфере и плоскости позволяют получить $\Phi_{\nu}(M)$ в конечном виде. Для поверхностей класса Ляпунова, следуя В.Ф. Пивню, $\Phi_{\nu}(M)$ будем искать в виде потенциала двойного слоя:

$$\begin{aligned} \Phi_{\nu}(M) = & \int_{\sigma} g_{\nu}(N) K_{\nu}(N) \frac{\partial F_{\nu}(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N + \int_{\sigma_{\nu}^*} f(P) K_{\nu}(P) \frac{\partial F_{\nu}(M, P)}{\partial n_P} d\sigma_P + \\ & \int_{\sigma_a} h(R) K_{\nu}(R) \frac{\partial F_{\nu}(M, R)}{\partial n_R} d\sigma_R + \sum_{i=1}^s \int_{\sigma_{Q_i}} d(Q_i) K_{\nu}(Q_i) \frac{\partial F_{\nu}(M, Q_i)}{\partial n_{Q_i}} d\sigma_{Q_i}, M \in D_{\nu}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь записан квазипотенциал возмущения для случая, когда скважины моделируются перфорированным цилиндром. Если используется модель скважин "линейный сток", то последняя сумма отсутствует.

Если область D_I не ограничена, то необходимо, чтобы для $\Phi_I(M)$ выполнялись условия:

$$\Phi_I(M) = O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right); K_I(M) \nabla \Phi_I(M) = O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right), \quad (13)$$

где $N \in \sigma$, r_{MN} - расстояние между точками M и Π и J

Выполняя для квазипотенциалов (9) граничные условия (2) - (5), (7) приходим к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} \frac{g_1(M)}{2} + \frac{g_2(M)}{2} + \Phi_1(M) - \Phi_2(M) = \varphi_{02}(M) - \varphi_{01}(M), M \in \sigma; \\ K_1(M) \frac{\partial \Phi_1(M)}{\partial n_M} - K_2(M) \frac{\partial \Phi_2(M)}{\partial n_M} = K_2(M) \frac{\partial \varphi_{02}(M)}{\partial n_M} - K_1(M) \frac{\partial \varphi_{01}(M)}{\partial n_M}, M \in \sigma; \\ \frac{f(M)}{2} + \Phi_{\nu}(M) = \varphi_{0\nu}(M), M \in \sigma_{\Pi}^{\nu}, \nu = 1, 2 \\ \frac{\partial \Phi_{\nu}(M)}{\partial n_M} = -\frac{\partial \varphi_{0\nu}(M)}{\partial n_M}, M \in \sigma_{02}^{\nu}, \nu = 1, 2 \end{cases} \quad (14)$$

$$K_{\nu}(M) \frac{\partial \Phi_{\nu}(M)}{\partial n_M} = -\sum_{i=1}^s \tilde{q}_{i\nu} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \delta(M - M_{ij}) - K_{\nu}(M) \frac{\partial \varphi_{0\nu}(M)}{\partial n_M}, j = m(s-1) + i, M \in \sigma_{\alpha} \quad (15)$$

в которую входят как уравнения типа Фредгольма (14₁) и (14₃), так и гиперсингулярные интегральные уравнения (14₂), (14₄), (15). Особенностью решения задачи сопряжения в кусочно-неоднородных средах является то, что на поверхности сопряжения заданы две функции: одна определяет течение в одной области, другая в другой. Для их нахождения на одной поверхности записываются

два интегральных уравнения: одно гиперсингулярное, второе является уравнением **Фредгольма**.

Дополнительные условия (6) и (8) для каждой модели скважины приводят к следующим интегральным соотношениям. Для модели линейный сток:

$$\Phi_v(M_{\alpha}) = C_i - \varphi_{qv}(M_{\alpha}), M_{\alpha} \in \sigma_{\alpha}, \quad (16)$$

для модели перфорированного цилиндра

$$\Phi_v(M_{\alpha}) = C_i - \varphi_{qv}(M_{\alpha}), M_{\alpha} \in D_{\alpha}. \quad (17)$$

Итак, для нахождения **дебитов** скважин имеем систему интегральных уравнений и соотношений (14), (16) (для модели линейный сток) или (14), (15) и (17) (для модели перфорированного цилиндра).

Для решения системы интегральных уравнений применён метод дискретных особенностей, развитый в трудах И.К. **Лифанова**. Используя этот метод, решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Каждая из поверхностей задаётся параметрически, например, $a = \sigma(\xi, \zeta)$, где ξ и ζ - параметры, заданные на множестве $\Pi = \{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \zeta \leq 1\}$ - единичном квадрате. Поверхности разбиваются равномерно по каждому из параметров на ячейки σ_{ij} .

Для интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма интегралы заменим на суммы по квадратурной формуле прямоугольников. Для решения гиперсингулярных интегральных уравнений воспользуемся обобщением метода замкнутых дискретных вихревых рамок **{МЗДВР}** на случай неоднородных сред, когда $K(M) = K(z_M)$. Для кусочно-однородных сред применяется МЗДВР в том виде, как он был предложен в работе И.К. Лифанова. Идея метода основана на том, что в силу квазипотенциальности течения можно показать, что скорости, создаваемые замкнутой вихревой нитью C_{ij} постоянной интенсивности, совпадают со скоростями, создаваемыми потенциалом двойного слоя, распределённым с постоянной плотностью на поверхности σ_{ij} , опирающейся на этот контур. То есть, если $\tilde{V}_{ij}(M) \sim$ вектор **скорости**, создаваемый в точке M от ячейки σ_{ij} то, как показано в диссертации, её компоненты можно вычислить по формулам

$$\begin{aligned} (V_y)_x(M) &= -K(z) \int_{C_y} K_v(z_N) \left[\frac{\partial F_v(M, N)}{\partial z_N} dy_N - \frac{\partial F_v(M, N)}{\partial y_N} dz_N \right]; \\ (V_y)_y(M) &= -K(z) \int_{C_y} K_v(z_N) \left[\frac{\partial F_v(M, N)}{\partial x_N} dz_N - \frac{\partial F_v(M, N)}{\partial z_N} dx_N \right]; \\ (V_y)_z(M) &= K(z) \frac{\partial}{\partial n_M} \int_{C_y} \left[\frac{\partial \Psi_v(M, N)}{\partial y_N} dx_N - \frac{\partial \Psi_v(M, N)}{\partial x_N} dy_N \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где введена вспомогательная функция $\Psi(M, N)$, удовлетворяющая соотношению

$$F_v(M, N) = \frac{1}{K_v(z_N)} \frac{\partial \Psi(M, N)}{\partial z_N}. \quad (19)$$

Для гиперсингулярного интегрального уравнения с δ -функцией в правой части решение основано на замене δ -функции её дискретным аналогом - ступенькой.

Если поверхность, на которой записано гиперсингулярное интегральное уравнение является замкнутой, то получаемая система алгебраических уравнений оказывается вырожденной. Такая ситуация возникает для поверхности сопряжения, непроницаемой поверхности, в частности на поверхности скважин. В данном случае необходимо провести регуляризацию системы алгебраических уравнений с помощью ввода **регуляризующей** переменной. Поскольку внутренняя задача Неймана решается с точностью до константы, то зафиксировав функцию $g(M)$ в некоторой точке, мы тем самым фиксируем квазипотенциал внутри замкнутой области (так как $g(M)$ определяет скачок потенциала на непроницаемой поверхности) и задача решается однозначно. Для поверхности скважины такой метод регуляризации применять нельзя, так как в постановку задачи входит дополнительное условие, определяющее потенциал внутри скважины и поэтому дебит скважины будет зависеть от выбора точки, в которой будем задавать $g(M)$. В данном случае условие регуляризации будет заключаться в том, что поток через замкнутую поверхность равен нулю.

В главах 2 и 3 показаны результаты системных исследований влияния поверхностей, ограничивающих область фильтрации, интерференция скважин. Исследования проводились для разных моделей фильтров скважин.

В частности, в главе 2 приведены результаты конкретных исследований

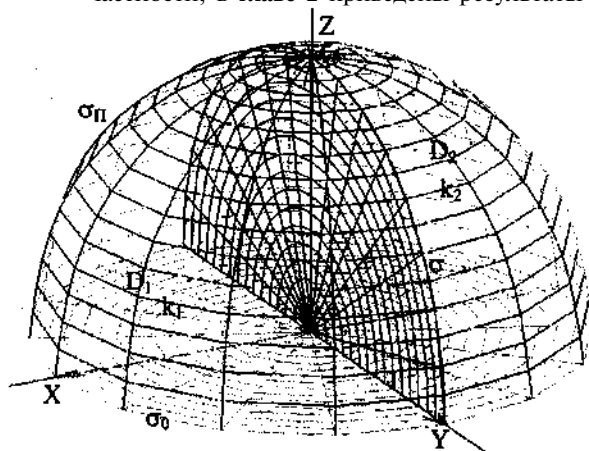


Рис. 3. Сетка на поверхностях σ_π и σ_0

по расчётам дебитов системы скважин в кусочно-однородных средах.

В первом параграфе представлены результаты расчётов дебитов скважин, расположенных в кусочно-однородных средах, когда плоскость (или часть плоскости) OXY является непроницаемой поверхностью, сфера (полусфера) единичного радиуса

является поверхностью питания, а плоскость OXZ является поверхностью сопряжения (рис.3).

Полученные решения позволяют провести ряд исследований. В частности, расчёты показали, что при приближении скважины к поверхности питания дебит скважины увеличивается, а при приближении к непроницаемой поверхности наоборот - убывает.

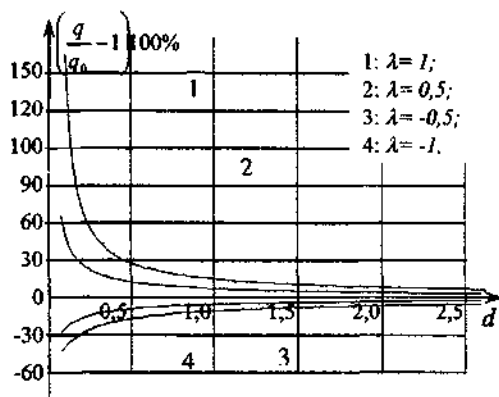


Рис. 4. Влияние поверхности a на дебит скважины

При приближении скважины к поверхности сопряжения с ростом $\lambda = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$ дебит скважины

возрастает. Этот результат показан на рисунке 4, где по оси ординат откладывался относительный дебит скважины (q_0 - дебит скважины в отсутствие поверхности a), а по оси абсцисс - рас-

стояние от скважины до поверхности a (расстояние d измерялось в радиусах полусферы). Расчёты, проведённые как для наклонных, так и вертикальных скважин, показали, что воздействие поверхностей на дебит скважин аналогично и для наклонных и для вертикальных скважин.

Решённые задачи в конечном виде в дальнейшем используются для исследования сходимости численных методов.

Во втором параграфе показаны особенности получения системы интегральных уравнений для кусочно-однородных сред. Представлено использование **МЗДВР** для решения гиперсингулярных интегральных уравнений в случае кусочно-однородных сред: вычисление интеграла по замкнутому контуру сводится к аналитическим формулам.

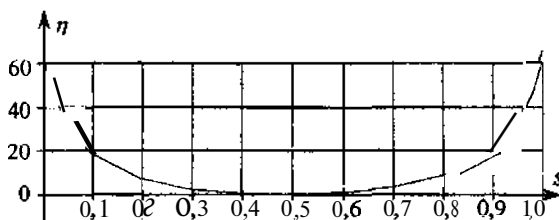


Рис. 5. Зависимость дебита от положения точки M_{ci} на σ_{ci}

оси абсцисс откладывалось расстояние от точки M_{ci} на поверхности скважины

В третьем параграфе проведён анализ модели линейный сток. Исследовалась зависимость дебита скважины от выбора точки M_c , в которой задавалось дополнительное условие на дебит скважины. Результаты исследований представлены на рисунке 5. Здесь по

до основания цилиндра, в котором расположена точка Мл/ (см. рис.2). По оси ординат отмечена величина $\eta = \left(\frac{q}{q_0} - 1 \right) 100\%$ (q_0 – дебит скважины при $s=0,5$, что соответствует положению точки $M_{св}$ изображённому на рисунке 2).

Расчёты показали, что значения дебита могут варьироваться в пределах

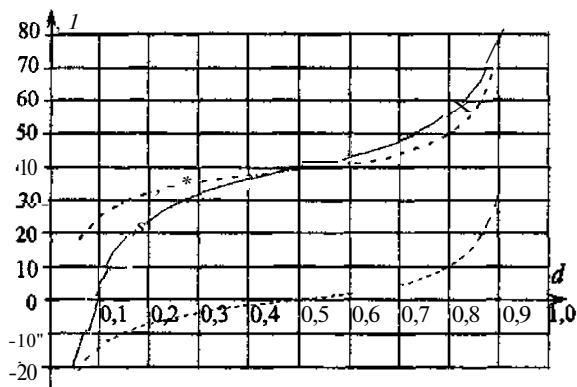


Рис. 6. Сравнение дебитов скважин для разных моделей фильтров скважин

50-60%, что сопоставимо с влиянием на дебит скважины поверхности питания или непроницаемой поверхности (сравните рис. 4 и 5). Поэтому модель линейного стока нуждается в уточнении: необходимо уточнить выбор расположения точки M_c на поверхности скважины. Для этого предлагается использовать модель скважины в виде перфорированного цилиндра.

В дальнейшем приводятся примеры расчетов для разных моделей. В случае, когда в области фильтрации имеется одна скважина или скважины расположены далеко друг от друга и мало влияют друг на друга, то задачу можно решать используя как более сложную модель, так и модель линейного стока. Поверхностей сопряжения, непроницаемой поверхности и поверхности питания оказывают одинаковое воздействие на дебит скважин при использовании различных моделей: отклонения в дебитах составляют не более 5-10%. Этот результат продемонстрирован на рисунке 6, где изображены зависимости относительных дебитов скважины от расстояния между скважиной и плоскостью ОХУ. Область фильтрации изображена на рисунке 1 при отсутствии поверхности а. На рисунке 6 сплошной линией показана зависимость для дебита скважины, моделируемой перфорированным цилиндром, пунктирной линией аналогичная зависимость для модели скважины в виде линейного стока при $s=0,5$, а штрих-пунктирной - для модели линейного стока при $s=0,93$.

Таким образом, при моделировании скважины линейным стоком необходимо брать точку M_c вблизи одного из концов линейного стока. Как показывают расчёты наиболее оптимальный вариант, когда расстояние M_0M_c (M_0 – точка одного из концов фильтра) составляет 0,9 от длины скважины L . В дальнейшем, когда проводились исследования, использовалась именно модель линейного стока с соответствующим выбором точки M_c на поверхности скважины.

Для исследования адекватности построения новой модели была исследована задача о точечном стоке, расположенном на сферической непроницаемой поверхности. Для этой задачи, решаемой с помощью интегрального уравнения известно решение в конечном виде.

Сравнение полученного решения в конечном виде и численного решения задачи показывает целесообразность использования МЗДВР для данного класса

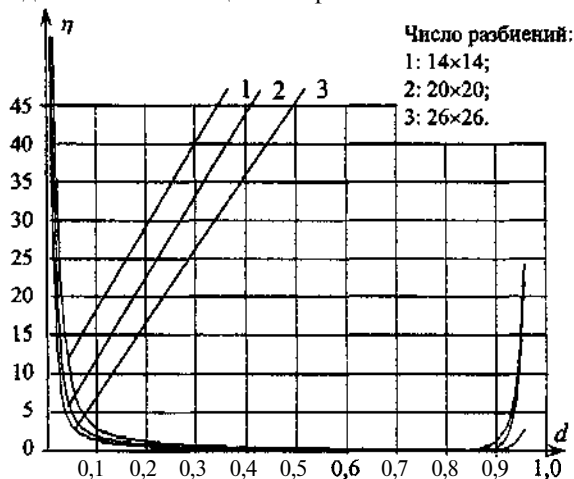


Рис. 7. Относительная погрешность вычисления дебита скважины методом дискретных особенностей

задач. Особенностью решения задач со стоком на непроницаемой поверхности является то, что для достижения требуемой точности в расчётах (1-5%) требуется большее число разбиений непроницаемой поверхности: функция $g(M)$ терпит разрыв в точке, где расположен сток.

В четвёртом параграфе показана сходимость метода дискретных особенностей к точному решению: сравнивались решения из §2.1,

полученные в конечном виде и решения, полученные в результате численных расчётов. На рисунке 7 приведены графики зависимостей относительной погрешности дебита скважины от расстояния между скважиной и плоскостью ОХУ. Область фильтрации изображена на рисунке 1 в отсутствие поверхности a . Как видно из рисунка 7, при приближении скважины к поверхностям a или σ_0 погрешность в расчётах дебита возрастает и с увеличением числа разбиений погрешность уменьшается. Поэтому при решении уравнения Фредгольма для достижения точности в 5% достаточно 400 точек разбиения на каждой из поверхностей. Для гиперсингулярного уравнения для достижения аналогичной точности требуется увеличить число разбиений до 600. Это объясняется тем, что в ядро гиперсингулярного уравнения входит особенность вида $\frac{(\bar{n}_M, \bar{n}_N)}{r_{MN}}$.

Далее проводятся исследования влияния поверхности сопряжения и непроницаемой поверхности на дебит скважины. Показано, что на дебит скважины влияет расстояние от скважин до поверхности и взаимное расположение поверхностей (например, непроницаемых включений) друг относительно друга, а форма поверхности роли не играет. Поэтому в ряде случаев для проведения

расчетов достаточно заменить действительную поверхность на соответствующую каноническую поверхность (**например**, сферу или плоскость) и провести упрощённые расчёты с использованием формул в конечном виде.

Как было показано выше, при приближении скважины к поверхности пита-

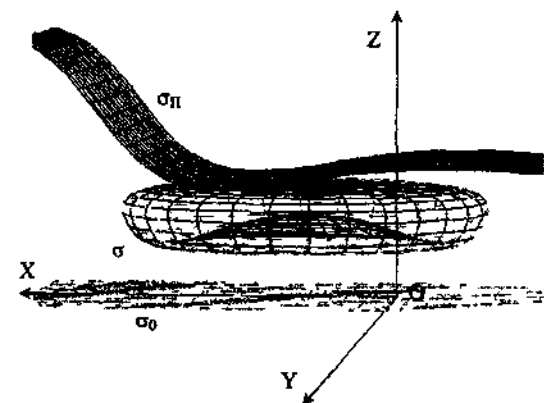


Рис 8 Область фильтрации для решения задачи по нахождению оптимального расположения скважины

однородной среде со сложной геологической структурой (см. рис. 8). Здесь σ_{π} - поверхность питания, моделирующая речное или морское дно, σ - непроницаемая поверхность (подошва слоя), σ - более плотное чем окружающая среда включение. Определим положение скважины, при котором её дебит максимален. Для расчёта используем метод градиентного спуска. Поле скоростей, соответствующее оптимальному расположению скважины, изображено на рисунке 9. Здесь σ - поверхность непроницаемого включения, расстояния измерялись в длинах фильтра скважины.

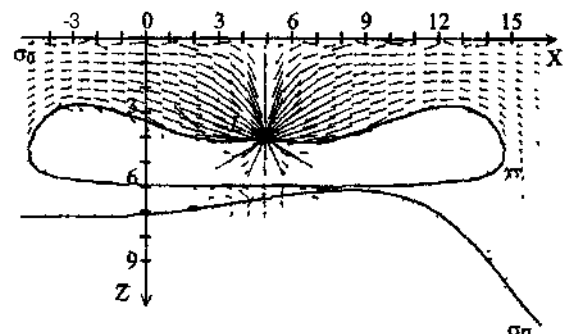


Рис. 9. Поле скоростей к скважине

ния дебит возрастает, при приближении к непроницаемой поверхности - наоборот, убывает. Таким образом, целесообразно располагать скважины вблизи поверхности питания и вдали от непроницаемой поверхности. В ряде случаев без численного эксперимента нельзя однозначно сказать, где нужно расположить скважину, чтобы её дебит был максимален.

В качестве примера рассмотрим скважину в кусочно-

В пятом параграфе было проведено исследование взаимного влияния наклонных и горизонтальных скважин. В частности показано, что целесообразно использовать почти горизонтальные скважины. Исследования проводились для разных моделей скважин. При близко расположенных скважинах необходимо ис-

пользовать модель скважины в виде системы стоков, расположенных на непроницаемой поверхности. С увеличением числа скважин происходит уменьшение удельного дебита (дебит приходящийся на одну скважину).

Глава 3 посвящена решению трехмерных задач фильтрации в кусочно-неоднородных средах.

В первом параграфе решены задачи в конечном виде, когда поверхностью сопряжения является сфера (полусфера) или плоскость (полуплоскость) в гармонических и **метагармонических** слоях, то есть в слоях, коэффициенты проницаемости которых, меняются по закону (гармонический слой)

$$K_v(M) = b_v(z_M - a_v)^2, a_v, b_v = \text{const} \quad (20)$$

или (**метагармонический** слой)

$$K_v(M) = (a_v e^{\mu_v z_M} + b_v e^{-\mu_v z_M})^2, a_v, b_v, \mu_v = \text{const}. \quad (21)$$

Для этих слоев известны фундаментальные решения уравнения (1) и они принимают соответственно вид:

$$F_v(M, N) = \frac{1}{4\pi b_v(z_M - a_v)(z_N - a_v)} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_v^*} \right); \quad (22)$$

$$F_v(M, N) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} (a_v e^{\mu_v z_M} + b_v e^{-\mu_v z_M})^{-1} (a_v e^{\mu_v z_N} + b_v e^{-\mu_v z_N})^{-1} \frac{e^{-\mu_v R}}{R} \frac{a_v}{b_v} > 0; \\ \frac{1}{4\pi \kappa_v \text{sh}(\mu_v(z_M - \tilde{a}_v)) \text{sh}(\mu_v(z_N - \tilde{a}_v))} \left(\frac{e^{-\mu_v R}}{R} - \frac{e^{-\mu_v R_v^*}}{R_v^*} \right) \frac{a_v}{b_v} < 0, \end{cases} \quad (23)$$

где введены обозначения $R_v^* = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M + z_N - 2a_v)^2}$,

$$\kappa_v = -4a_v b_v, \tilde{a}_v = \frac{1}{2\mu_v} \ln \left(-\frac{b_v}{a_v} \right).$$

Фундаментальные решения удовлетворяют граничному условию (5) (если сингулярная поверхность σ_{0l} существует).

Полученные решения сравниваются с аналогичными решениями для кусочно-однородных сред. Решение этих простейших задач фильтрации показало, что сингулярная поверхность по-разному влияет на горизонтальные и вертикальные скважины: в случае горизонтальных скважин при приближении скважины к поверхности приведённый дебит возрастает, а в случае вертикальных — уменьшается. Под приведённым дебитом рассматривается дебит, приходящийся на единицу проницаемости среды, в которой расположена скважина, то есть

$$q = \frac{\alpha}{K}. \text{ Для неоднородной среды с коэффициентом проницаемости } K(M) = z_M^2$$

результаты исследований влияния сингулярной поверхности $\sigma_{0l} (z_M=0)$ на приведённый дебит скважины показаны на рисунке 10. Исследования также показывают, что влияние поверхности сопряжения, поверхности питания и непроницаемой поверхности на дебит скважины как в кусочно-однородных, так и кусочно-неоднородных средах одинаковое.

Во втором параграфе показаны особенности решения гиперсингулярного интегрального уравнения для неоднородных сред, когда $K=K(z_M)$. В частности доказаны формулы (18), (19).

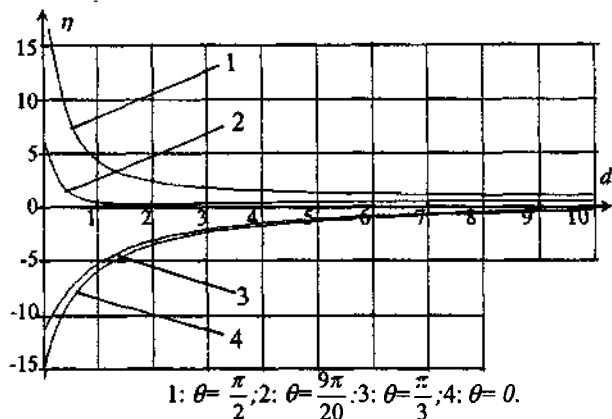


Рис. 10. Влияние сингулярной поверхности на дебит скважины

численных методов. Показано влияние неоднородности среды на оптимальное расположение скважины в кусочно-неоднородных слоях. Исследования проводились как для гармонических, так и **метагармонических** слоев.

Решение задач **фильтрации** в кусочно-неоднородных средах приводит к необходимости нахождения фундаментальных решений уравнения (1) для соответствующей функции $K(M)$. Это представляет собой отдельную сложную математическую задачу, в которой необходимо учитывать сингулярную поверхность. Для произвольных $K(M)$ её решить можно только численно. Проведённый ряд исследований для неоднородных сред показывает, что если заменить среду с некоторой проницаемостью на среду с близкой проницаемостью, то на рассчитываемый дебит скважины такая замена влияет мало. Поэтому в §3.3 предлагается задачи о дебите скважин, расположенных в средах с **проницаемостями** $K=K(z)$ решать как задачу о скважине, расположенной в кусочно-неоднородной среде с **проницаемостями**, соответствующие фундаментальные решения которых выражаются через элементарные функции. Это приводит к значительному ускорению в расчётах и если среда слоистая, то позволяет сразу учитывать с помощью интегральных уравнений граничные условия на границах раздела неоднородности сред.

В качестве примера рассмотрим случай, когда коэффициент проницаемости среды меняется вдоль оси OZ по следующему закону:

С помощью метода дискретных особенностей (в том числе МЗДВР, обобщённого на случай неоднородных сред) проведены исследования влияния неоднородности среды на **дебиты** скважин. Показаны практические оценки скорости сходимости расчётов

$$K(M) = \begin{cases} 25z_M^2, & 0 \leq z_M \leq 0,2; \\ 1, & 0,2 < z_M \leq 0,8; \\ 25(z_M - 1)^2, & 0,8 < z_M \leq 1. \end{cases} \quad (24)$$

График зависимости дебита горизонтальной скважины при изменении её положения вдоль оси OZ показан на рисунке 11. Как видно из рисунка, вблизи плоскостей $z=0,2$ и $z=0,8$ увеличивается погрешность в вычислении дебита скважины. Это объясняется тем, что на этих **поверхностях** сингулярные и гиперсингулярные уравнения решаются численно.

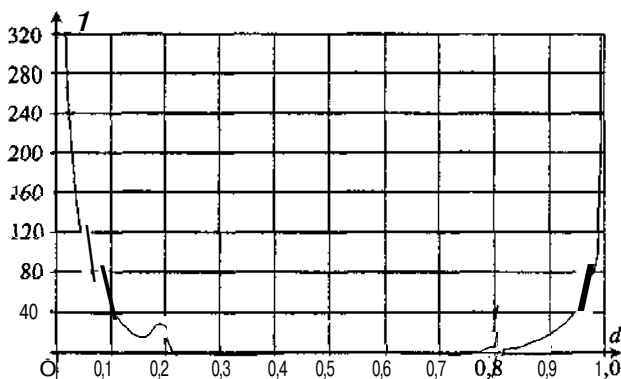


Рис. 11. Зависимость дебита скважины от расстояния при перемещении скважины вдоль оси OZ.

В последнем параграфе показано взаимное влияние наклонных и горизонтальных скважин, расположенных в неоднородной среде.

Продемонстрирована интерференция скважин: с ростом проницаемости наблюдается уменьшение взаимно-

го влияния скважин.

В заключении подводятся итоги работы и излагаются её основные результаты.

Автор выражает благодарность и огромную признательность доктору физико-математических наук, профессору Орловского государственного университета **Пивню В.Ф.** за оказанное внимание и поддержку при подготовке диссертационной работы.

Основные результаты работы

1. Построены и исследованы новые трёхмерные математические модели работы системы скважин в кусочно-однородных и кусочно-неоднородных слоях, ограниченных поверхностью питания и непроницаемой поверхностью. Все поверхности моделируются поверхностями класса Ляпунова, проницаемости сред в области фильтрации описываются произвольными гладкими функциями.

2. Численно решена система **фредгольмовских** и гиперсингулярных интегральных уравнений. Обобщён метод замкнутых дискретных вихревых ра-

мок, применяемый для решения гиперсингулярных интегральных уравнений, на случай неоднородных сред, когда проницаемость среды является функцией одной переменной.

3. Показана эффективная методика расчёта дебитов скважин в средах с произвольными **проницаемостями $K(z)$** с помощью решения задачи через систему интегральных уравнений и проведены примеры расчётов. Полученный результат обобщён на случай решения трёхмерных задач фильтрации в слоистых средах.

4. Построены новые модели фильтров скважин. Отображены результаты сравнения разных моделей скважины, приведено уточнение известных моделей. Дано обоснование использования той или иной модели в конкретных задачах практики. Построение новой модели привело к решению граничных задач с принципиально новыми граничными условиями, а также к решению гиперсингулярных интегральных уравнений с обобщёнными функциями в правой части.

5. Исследовано влияние на дебиты скважин границ области фильтрации, неоднородности слоя, их взаимное положение и интерференция скважин. Решена задача оптимального расположения скважины в области фильтрации. Приведён сравнительный анализ дебитов горизонтальных и наклонных скважин с вертикальными скважинами.

Публикации по теме диссертации

1. Пивень В.Ф., Ставец С.Л. Численное решение интегрального уравнения задачи сопряжения **осесимметричной** фильтрации. // Труды IX международного симпозиума "МДОЗМФ-2000", с. 354-358.
2. Ставец С.Л. Точное решение задачи о дебите системы скважин для контура питания в виде полусферы при наличии непроницаемой границы. // Труды X международного симпозиума "МДОЗМФ-2001", с. 340-345.
3. Ставец С.Л. Особенности расчёта поля скоростей трёхмерных течений в кусочно-неоднородной среде. // Труды "Школы молодых учёных МДОЗМФ-2002", 2002, с. 92-97.
4. Ставец С.Л. "Математические модели фильтров скважин" Вісник Харківського національного університету, № 590, 2003г, с.231-235.
5. Lifanov I.K., Piven' V.F., Stavtsev S.L. Mathematical modelling of the three-dimensional boundary value problem of the discharge of the well system in a homogeneous layer // Russian Journal Numerical Analysis and Mathematical Modeling, v.17, №1, 2002, p.99-112.